第27卷 第1期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 1
2010年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0105-06

不可约 Z-矩阵最小特征值的数值算法*

刘利斌[1]， 刘焕文[2]， 殷丽霞[1]

(1- 池州学院数学与计算机科学系，安徽 池州 247000;
2- 广西民族大学数学与计算机科学学院，南宁 530006)

摘　要: 首先给出了不可约非负矩阵最大特征值的上下界。然后利用相似变换构造了一列相似矩阵，从而得到不可约非负矩阵最大特征值的逐步压缩的一列上下界，其极限为所要求的最大特征值。最后利用 Z-矩阵与非负矩阵的关系，给出了计算不可约 Z-矩阵最小特征值的一个新算法。理论上给出了收敛性证明。该算法迭代过程简单，不用计算逆矩阵，从而计算量小，占用内存少。数值实验的结果表明该算法具有可行性和有效性。

关键词: 非负矩阵；Z-矩阵；不可约；最小特征值；收敛率

分类号: **AMS**(2000) 34L15; 35L15　　**中图分类号**: O151.21　　**文献标识码**: A

1　引言

记

$$Z^{n,n} = \left\{A = (a_{ij}) \in R^{n,n} \mid a_{ij} \le 0,\ 1 \le i,\ j \le n,\ i \ne j \right\}.$$

进一步，对 $B = (b_{ij}) \ge 0$，令 $A = sI - B$，易知 $A \in Z^{n,n}$。若 $s > \rho(B)$，则称 A 为非奇异 M-矩阵。若对 s 无取值要求，但 $B = (b_{ij}) \ge 0$，则称矩阵 A 为 Z-矩阵。显然，Z-矩阵是比 M-矩阵更广泛的矩阵，出现在许多应用领域中，经常需要计算 Z-矩阵的最小特征值，而通常的方法是先对 Z-矩阵的上下界进行估计，见文献 [1-11]。文献 [7] 基于他们给出的 Z-矩阵最小特征值上下界的一个估计，提出了求解 Z-矩阵最小特征值及特征向量的数值算法，但他们方法的收敛速度较慢。本文利用 Z-矩阵与非负矩阵的关系，给出了计算不可约 Z-矩阵最小特征值的一个新算法。该算法迭代过程简单，与文献 [7] 和文献 [8] 相比，收敛速度更快。

设 $G = (g_{ij})_{n\times n}$ 是不可约 Z-矩阵，令

$$R > \max_i |g_{ii}|, \quad i \in N, \quad N = \{1, 2, \cdots, n\}.$$

于是有 $A = RI - G = (a_{ij})_{n\times n}$，其中 I 是 n 阶单位阵，此时 A 为具有正对角元 ($a_{ii} > 0$) 的非负不可约矩阵。如果 λ_0 是 A 的最大特征值，则 $\omega = R - \lambda_0$ 为 G 的最小特征值。因此，不可约 Z-矩阵 G 的最小特征值的算法依赖于具有正对角元的非负不可约矩阵 A 的最大特征值的算法。

2　主要结果

首先给出以下两个引理，参见文献 [6]。

收稿日期: 2008-05-28.　**作者简介**: 刘利斌 (1982年8月生)，男，硕士. 研究方向：数值代数.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10962001)；广西研究生教育创新基金 (2008106080701M369).

引理1 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正数，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是任意的实数，则

$$\min_i \frac{b_i}{a_i} \le \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \le \max_i \frac{b_i}{a_i}. \tag{1}$$

当且仅当所有的

$$\frac{b_i}{a_i}, \quad i=1,2,\cdots,n$$

相等时，(1) 式等号成立。

引理2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A^k 的第 i 行行和与第 i 列列和分别记为 $r_i(A^k)$ 与 $c_i(A^k)$，则

$$r_i(A^{k+1})=\sum_{t=1}^{n} a_{it}r_t(A^k), \quad c_i(A^{k+1})=\sum_{t=1}^{n} a_{ti}c_t(A^k). \tag{2}$$

以下总记 A 为 n 阶不可约非负矩阵。

定理1 设 λ_0 是 A 的最大特征值，$B=(A+I)^p$ (I 为单位矩阵，p 为任意给定的正整数)。以 $r_i(A)$ 和 $c_i(A)$ 分别记 A 的第 i 行行和与第 i 列列和。若 $r_i(A)>0$，$i=1,\cdots,n$，则

$$\min_i \frac{r_i(AB)}{r_i(B)} \le \lambda_0 \le \max_i \frac{r_i(AB)}{r_i(B)}, \tag{3}$$

若 $c_i(A)>0$, $i=1,\cdots,n$，则

$$\min_i \frac{c_i(AB)}{c_i(B)} \le \lambda_0 \le \max_i \frac{c_i(AB)}{c_i(B)}. \tag{4}$$

证明类似于文献 [6] 中定理1的证明。

记 $A_0=A=(a_{ij})_{n\times n}$，构造如下迭代序列

$$A_{k+1}=D_k^{-1}A_kD_k, \quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中

$$D_k=\mathrm{diag}\big(r_1(A_k),r_2(A_k),\cdots,r_n(A_k)\big),$$

显然矩阵序列 $\{A_k\}$ 是相似的且不可约。又记 $B_k=(A_k+I)^p$ (p 为任意给定的正整数)。于是可得本文的主要结果。

定理2 令

$$r_{\min}^{(k)}=\min_i \frac{r_i(A_kB_k)}{r_i(B_k)}, \quad r_{\max}^{(k)}=\max_i \frac{r_i(A_kB_k)}{r_i(B_k)},$$

则 A 的最大特征值 λ_0 满足

$$r_{\min}^{(k)} \le r_{\min}^{(k+1)} \le \lambda_0 \le r_{\max}^{(k+1)} \le r_{\max}^{(k)}. \tag{5}$$

证明 记

$$(c_{ij}^{(k+1)})_{n\times n}=A_{k+1}(A_{k+1}+I)^p, \quad (d_{ij}^{(k+1)})_{n\times n}=(A_{k+1}+I)^p, \quad r_i^{(k)}=\frac{r_i(A_kB_k)}{r_i(B_k)}.$$

则

$$r_i^{(k+1)}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}^{(k+1)}}{\sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij}^{(k+1)}}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{r_j(A_k)}{r_i(A_k)}c_{ij}^{(k)}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{r_j(A_k)}{r_i(A_k)}d_{ij}^{(k)}}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} r_j(A_k)c_{ij}^{(k)}}{\sum\limits_{j=1}^{n} r_j(A_k)d_{ij}^{(k)}}.$$

由引理 1 有

$$r_{\min}^{(k)} = \min_i \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}^{(k)}}{\sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij}^{(k)}} \le r_i^{(k+1)} \le \max_i \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}^{(k)}}{\sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij}^{(k)}} = r_{\max}^{(k)}. \tag{6}$$

即 $r_{\min}^{(k)} \le r_i^{(k+1)} \le r_{\max}^{(k)}$。从而

$$r_{\min}^{(k)} \le r_{\min}^{(k+1)} \le \lambda_0 \le r_{\max}^{(k+1)} \le r_{\max}^{(k)}. \tag{7}$$

下面的定理保证了区间序列 $\left[r_{\min}^{(k)}, r_{\max}^{(k)}\right]$，$k = 0, 1, \cdots$，将逐步收窄。

定理 3　对任意迭代步 k，存在一个正整数 s $(1 \le s \le n)$，使得

$$r_{\max}^{(k+s)} < r_{\max}^{(k)}, \quad r_{\min}^{(k+s)} > r_{\min}^{(k)}.$$

证明类似于文献 [7] 中定理 2 的证明。

与文献 [7] 比较，本文有关不可约非负矩阵的最大特征值的算法同样是用对角变换进行迭代，在迭代过程中对角元始终保持不变，非零非对角元的计算只需采用简单的公式 $c_{ij}^{(k+1)} = c_{ij}^{(k)} r_j^{(k)} / r_i^{(k)}$，因此计算量不大，占用内存少，尤其在大规模稀疏矩阵的计算中优势明显。在保持文献 [7] 算法优点的同时，本文算法的收敛速度更快。我们有如下结果。

定理 4　对任意的正整数 m $(m = 0, 1, \cdots)$，有

$$\max_i \frac{r_i(A(A+I)^{m+1})}{r_i((A+I)^{m+1})} \le \max_i \frac{r_i(A(A+I)^m)}{r_i((A+I)^m)},$$

$$\min_i \frac{r_i(A(A+I)^{m+1})}{r_i((A+I)^{m+1})} \ge \min_i \frac{r_i(A(A+I)^m)}{r_i((A+I)^m)}.$$

证明　记 $A + I = (b_{ij})_{n\times n}$，由引理 1 和引理 2 得

$$\begin{aligned}\frac{r_i(A(A+I)^{m+1})}{r_i((A+I)^{m+1})} &= \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} b_{it} r_t(A(A+I)^m)}{\sum\limits_{t=1}^{n} b_{it} r_t(A+I)^m} \\ &\le \max_t \frac{b_{it} r_t(A(A+I)^m)}{b_{it} r_t(A+I)^m} = \max_t \frac{r_t(A(A+I)^m)}{r_t(A+I)^m}.\end{aligned}$$

故第一式成立，同理可证第二式。

由定理 4 易知

$$\max_i \frac{r_i(A(A+I)^{m+1})}{r_i((A+I)^{m+1})} \le \max_i \frac{r_i(A(A+I)^m)}{r_i((A+I)^m)} \le \cdots \le \max_i \frac{r_i(A(A+I))}{r_i(A+I)} \le \max_i r_i(A),$$

$$\min_i \frac{r_i(A(A+I)^{m+1})}{r_i((A+I)^{m+1})} \ge \min_i \frac{r_i(A(A+I)^m)}{r_i((A+I)^m)} \ge \cdots \ge \min_i \frac{r_i(A(A+I))}{r_i(A+I)} \ge \min_i r_i(A).$$

当我们给定适当的正整数 m 时，每进行一次对角变换，利用本文方法估计得到的最大特征值上下界，其界宽比文献 [7] 方法的界宽窄。因此，本文方法的收敛速度明显比文献 [7] 的方法快，达到给定精度所需要的迭代次数更少。

于是，基于不可约非负矩阵与不可约 Z-矩阵的关系，我们有下面的结果。

定理 5 设 G 是不可约 Z-矩阵，ω 是 G 的最小特征值。取 $R > 0$，使 $RI - G = A$ 是不可约非负矩阵，A 的最大特征值 λ_0，则 $\omega = R - \lambda_0$。

3 算法及数值实验

算法

步骤 0 输入不可约 Z-矩阵 $G = (g_{ij})_{n\times n}$，$\varepsilon > 0$；

步骤 1 取 $R = 1 + \max\limits_i |g_{ii}|$，令 $A_0 = RI - G = (a_{ij})_{n\times n}$，$B_0 = (A_0 + I)^p$，$I$ 为 n 阶单位矩阵，p 为任意给定的正整数，$k = 0$；

步骤 2 计算

$$r_i^{(k)} = \frac{r_i(A_k B_k)}{r_i(B_k)}, \quad r_{\min}^{(k)} = \min_i r_i^{(k)}, \quad r_{\max}^{(k)} = \max_i r_i^{(k)};$$

步骤 3 如果 $(r_{\max}^{(k)} - r_{\min}^{(k)}) < \varepsilon$，则转步骤 5；

步骤 4 令

$$D_k = \operatorname{diag}(r_1(A_k), r_2(A_k), \cdots, r_n(A_k)), \quad A_{k+1} = D_k^{-1} A_k D_k,$$

$$B_{k+1} = (A_{k+1} + I)^p, \quad k \leftarrow k + 1,$$

转步骤 2；

步骤 5 输入 $\omega = R - \frac{1}{2}(r_{\max}^{(k)} + r_{\min}^{(k)})$。

例 1 设

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

G 为不可约 Z-矩阵，求 G 的最小特征值。

例 2 设

$$G = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 8 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 7 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & -1 & 9 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

G 为不可约 Z-矩阵，求 G 的最小特征值。

利用本文给出的算法，我们可以求得例 1 和例 2 矩阵的最小特征值，并与文 [7] 和文 [8] 的算法比较，数值结果分别见表 1 和表 2。

表 1: 例 1 的计算结果及比较

[7] 的迭代次数	本文算法 $p=5$ 时的迭代次数	精度	ω
13	5	10^{-4}	-4.7736
25	16	10^{-8}	-4.77363511
31	22	10^{-10}	-4.7736351183
36	28	10^{-12}	-4.773635118400

表 2: 例 2 的计算结果及比较

[7,8] 的迭代次数	本文算法 $p=2$ 时的迭代次数	精度	ω
17	15	10^{-4}	0.9444
33	30	10^{-8}	0.94440470
48	46	10^{-12}	0.9444046950296
67	64	10^{-16}	0.9444046950294975
67	64	10^{-20}	0.94440469502949753178

参考文献：

[1] Rrinhard Nabben. Z-matrices and inverse Z-matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 1997, 256: 31-48

[2] Lu L Z. Perron complement and Perron root[J]. Linear Algebra and its Applications, 2002, 341: 239-248

[3] 章伟，黄廷祝. 不可约 M-矩阵最小特征值的估计[J]. 工程数学学报，2004, 21(8): 31-34
Zhang W, Huang T Z. Estimates of the minimal eigenvalue of irreducible M-matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2004, 21(8): 31-34

[4] 卢琳璋，马飞. 非负矩阵 Perron 根的上下界[J]. 计算数学，2003, 25(2): 193-198
Lu L Z, Ma F. Upper and lower bounds of Perron roots of nonnegative matrices[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2003, 25(2): 193-198

[5] 胥兰，黄廷祝. 非负矩阵 Perron 根的上界序列[J]. 高等学校计算数学学报，2007, 29(4): 297-302
Xu L, Huang T Z. Upper bounds sequences for the Perron root of nonnegative matrices[J]. Numerical Mathematics a Journal of Chinese Universities, 2007, 29(4): 297-302

[6] 殷剑宏. 非负矩阵最大特征值的新界值[J]. 数值计算与计算机应用，2002, 23(4): 292-295
Yin J H. New bounds for the greatest characteristic root of a nonnegative matrix[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 2002, 23(4): 292-295

[7] 段复建，张可村. Z-矩阵最小特征值及特征向量的数值算法[J]. 工程数学学报，2007, 24(3): 563-566
Duan F J, Zhang K C. A numerical algorithm for the minimal eigenvalue and its eigenvector of Z-matrix[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(3): 563-566

[8] 段复建，张可村. 不可约 M-矩阵最小特征值的新算法[J]. 数值计算与计算机应用，2006, 27(3): 139-144
Duan F J, Zhang K C. A new algorithm for the minimal eigenvalue of irreducible M-matrix[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 2006, 27(3): 139-144

[9] Duan F J, Zhang K C. An algorithm of diagonal transformation for Perron root of nonnegative irreducible matrices[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 175: 762-772

[10] 秦雯，黄廷祝. 非负矩阵 Perron 根的下界[J]. 工程数学学报，2007, 24(6): 559-562
Qin W, Huang T Z. Lower bounds for the Perron roots of nonnegative matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(6): 559-562

[11] 吕洪斌. 非负矩阵Perron根的估计[J]. 工程数学学报，2008, 25(1): 67-73
Lv H B. Estimate for the Perron root of a nonnegative matrix[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(1): 67-73

A Numerical Algorithm for the Minimal Eigenvalue of an Irreducible Z-matrix

LIU Li-bin[1], LIU Huan-wen[2], YIN Li-xia[1]

(1- Department of Mathematics and Computer Science, Chizhou College, Chizhou Anhui 247000; 2- Faculty of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006)

Abstract: It is well-known that the problem to calculate the minimal eigenvalue of a matrix commonly occurs in many branches of science and engineering. In this paper, we consider the problem to calculate the minimal eigenvalue of a so-called Z-matrix. An upper and a lower bounds on the maximal eigenvalue of a nonnegative matrix are firstly given. Then by using a similarity transformation, a series of upper and lower bounds on the maximal eigenvalue of a nonnegative matrix are obtained, these bounds gradually approach the maximal eigenvalue. Finally, based on the relation between the Z-matrix and the nonnegative matrix, a numerical algorithm for computing the minimal eigenvalue of an irreducible Z-matrix is proposed. It is shown by numerical examples that the convergency rate of the presented method is faster than that of previous methods.

Keywords: nonnegative matrices; Z-matrices; irreducible; minimal eigenvalue; convergency rate

Received: 28 May 2008. **Accepted:** 01 Apr 2009.
Foundation item: The Natural Science Foundation of China (10962001); the Innovation Project of Guangxi Graduate Education (2008106080701M369).